

## IDŹ DO

PRZYKŁADOWY ROZDZIAŁ



SPIS TREŚCI

## KATALOG KSIĄŻEK

KATALOG ONLINE

ZAMÓW DRUKOWANY KATALOG

## TWÓJ KOSZYK

DODAJ DO KOSZYKA

## CENNIK I INFORMACJE

ZAMÓW INFORMACJE  
O NOWOŚCIACH

ZAMÓW CENNIK

## CZYTELNIA

FRAGMENTY KSIĄŻEK ONLINE

# Matematyka z komputerem dla gimnazjum

Autorzy: Aldona Kawałek, Marta Lepka, Maria Bobek

ISBN: 83-7361-577-6

Format: B5, stron: 148



Matematyka – „królowa nauk” – dla wielu ludzi jest nauką łatwą i sprawiającą przyjemność, a dla innych wiąże się z ogromnym wysiłkiem, wykonywaniem skomplikowanych obliczeń i koniecznością brania dodatkowych lekcji. Na szczęście do nauki matematyki można dziś wykorzystać komputer. Żmudne obliczenia, dotychczas wykonywane na papierze można zrzucić na arkusz kalkulacyjny Excel. Za pomocą komputera można też przygotować materiały pomocne podczas lekcji matematyki – wykresy, algorytmy, modele brył i wiele innych. Aby jednak nauka z komputerem była skuteczna, potrzeba wielu wskazówek – przykładów demonstrujących możliwości danego programu.

Książka „Matematyka z komputerem dla gimnazjum” jest zbiorem takich właśnie przykładów. Zaprezentowano w niej kilkadziesiąt zadań, które są rozwiązane za pomocą arkusza kalkulacyjnego Excel. Przykłady te pochodzą z różnych działów matematyki z zakresu gimnazjum. Pod treścią każdego przykładu krótko opisany jest sposób rozwiązania, a następnie całe rozwiązanie zaprezentowane w punktach, można więc wykonywać poszczególne polecenia krok po kroku.

**Przekonaj się, że matematyka nie jest taka straszna, na jaką wygląda.**



# Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	<b>7</b>
<b>Rozdział 1. Liczby pierwsze</b> .....	<b>13</b>
Wprowadzenie .....	13
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	13
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	17
Podsumowanie.....	17
<b>Rozdział 2. Najmniejsza wspólna wielokrotność oraz największy wspólny dzielnik</b> .....	<b>19</b>
Wprowadzenie .....	19
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	20
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	23
Podsumowanie.....	23
<b>Rozdział 3. Liczby wymierne</b> .....	<b>25</b>
Wprowadzenie .....	25
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	25
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	28
Podsumowanie.....	29
<b>Rozdział 4. Potęgi i pierwiastki</b> .....	<b>31</b>
Wprowadzenie .....	31
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	32
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	33
Podsumowanie.....	34
<b>Rozdział 5. Systemy liczbowe</b> .....	<b>35</b>
Wprowadzenie .....	35
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	36
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	39
Podsumowanie.....	39
<b>Rozdział 6. Wyrażenia algebraiczne</b> .....	<b>41</b>
Wprowadzenie .....	41
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	42
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	44
Podsumowanie.....	45

<b>Rozdział 7. Wartość bezwzględna liczby .....</b>	<b>47</b>
Wprowadzenie .....	47
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	48
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	49
Podsumowanie.....	49
<b>Rozdział 8. Funkcja .....</b>	<b>51</b>
Wprowadzenie .....	51
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	52
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	59
Podsumowanie.....	59
<b>Rozdział 9. Układy równań — metoda graficzna .....</b>	<b>61</b>
Wprowadzenie .....	61
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	62
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	66
Podsumowanie.....	66
<b>Rozdział 10. Procenty i ich zastosowanie w praktyce .....</b>	<b>67</b>
Wprowadzenie .....	67
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	68
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	72
Podsumowanie.....	72
<b>Rozdział 11. Zbieranie i opracowywanie danych .....</b>	<b>73</b>
Wprowadzenie .....	73
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	74
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	78
Podsumowanie.....	79
<b>Rozdział 12. Doświadczenia losowe .....</b>	<b>81</b>
Wprowadzenie .....	81
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	81
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	87
Podsumowanie.....	87
<b>Rozdział 13. Wielokąty — rysowanie łamanych .....</b>	<b>89</b>
Wprowadzenie .....	89
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	90
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	96
Podsumowanie.....	96
<b>Rozdział 14. Przekształcenia geometryczne .....</b>	<b>97</b>
Wprowadzenie .....	97
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	99
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	104
Podsumowanie.....	105
<b>Rozdział 15. Jednokładność figur .....</b>	<b>107</b>
Wprowadzenie .....	107
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	108
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	111
Podsumowanie.....	111

---

<b>Rozdział 16. Obliczanie pól i objętości figur</b> .....	<b>113</b>
Wprowadzenie .....	113
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	118
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	121
Podsumowanie.....	122
<b>Rozdział 17. Zadania z treścią</b> .....	<b>123</b>
Wprowadzenie .....	123
Podsumowanie.....	128
<b>Rozdział 18. Wyszukiwarki internetowe</b> .....	<b>129</b>
Wprowadzenie .....	129
Przykłady zadań z rozwiązaniami.....	131
Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	134
Podsumowanie.....	134
<b>Dodatek A Programy komputerowe na płycie CD</b> .....	<b>135</b>
<b>Skorowidz</b> .....	<b>141</b>

# Rozdział 8.

---

# Funkcja

## Wprowadzenie

Dane są dwa zbiory  $X$  i  $Y$ . *Funkcją* określoną na zbiorze  $X$  o wartościach w zbiorze  $Y$  nazywamy takie przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru  $X$  został przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru  $Y$ .

Zbiór  $X$  będziemy nazywali *dziedziną funkcji*. Na nim określona jest funkcja. Elementy dziedziny będziemy nazywali *argumentami funkcji*. Zbiór  $Y$  będziemy nazywali *zbiorem wartości funkcji*. Jego elementy są przyporządkowywane argumentom funkcji. Element zbioru  $Y$ , który został przyporządkowany elementowi  $x$  zbioru  $X$ , nazywamy *wartością funkcji* dla argumentu  $x$ .

Funkcję można przedstawić na różne sposoby:

- ❖ za pomocą omówienia słownego,
- ❖ za pomocą równania,
- ❖ za pomocą tabelki,
- ❖ za pomocą grafu,
- ❖ za pomocą zbioru par uporządkowanych,
- ❖ za pomocą wykresu w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie.

Funkcję  $f$  określoną wzorem

$$y = ax + b$$

dla  $a, b \in R$  nazywamy *funkcją liniową*.

Współczynnik  $a$  nazywamy *współczynnikiem kierunkowym* prostej, zaś współczynnik  $b$  — *wyrazem wolnym*.

Wykresem funkcji liniowej jest *prosta*.

Współczynnik kierunkowy  $a$  we wzorze funkcji liniowej określa kąt nachylenia do osi  $x$  prostej, będącej wykresem tej funkcji. Wyraz wolny  $b$  we wzorze funkcji liniowej określa miejsce przecięcia danej prostej z osią  $y$ .

Funkcję  $f$  określoną wzorem

$$y = ax^2 + bx + c$$

gdzie  $a \neq 0$ , na zbiorze liczb rzeczywistych nazywamy *funkcją kwadratową*.

Wykresem funkcji kwadratowej jest *parabola*.

## Przykłady zadań z rozwiązaniami

### Przykład 8.1.

Sporządź wykres funkcji  $y = 2x + 3$ .

#### Sposób rozwiązania

Na początku tworzymy tabelę, w której umieścimy argumenty i jej wartości. Następnie, korzystając z *Kreatora wykresów* arkusza kalkulacyjnego Excel, stworzymy wykres.

#### Rozwiązanie

1. Wprowadź stałe tekstowe. Wpisz do wszystkich komórek nowego skoroszytu tekst zgodnie z rysunkiem 8.1.

#### Rysunek 8.1.

Zakres danych koniecznych do wpisania

	A	B	C
1	Prosta $y=ax+b$		
2	a=	2	
3	b=	3	
4			
5	x	y	
6	-2		
7	-1		
8	0		
9	1		
10	2		
11			

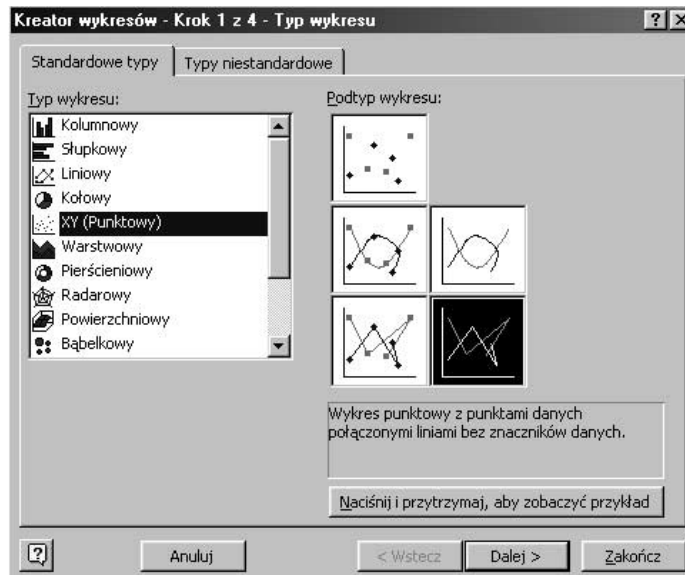
2. Oblicz wartości funkcji dla zadanych argumentów. Do komórki B6 wpisz formułę  $=B\$2*A6+B\$3$  i naciśnij *Enter*.
3. Zaznacz komórkę B6 i za pomocą uchwytu skopiuj formułę aż do komórki B20 (rysunek 8.2).

**Rysunek 8.2.**  
Obliczenia

	A	B	C
1	<b>Prosta <math>y=ax+b</math></b>		
2	<b>a=</b>	2	
3	<b>b=</b>	3	
4			
5	<b>x</b>	<b>y</b>	
6	-2	-1	
7	-1	1	
8	0	3	
9	1	5	
10	2	7	
11			

4. Sporządź wykres. Kliknij na dowolną pustą komórkę (np. C3). Z głównego menu wybierz *Wstaw/Wykres...*. Po pojawieniu się okna wybierz *Typ wykresu/(XY)Punktowy* i kliknij *Dalej* (rysunek 8.3).

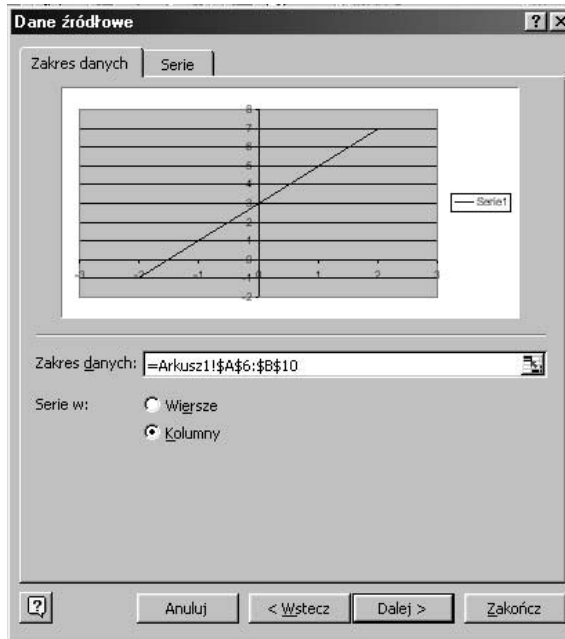
**Rysunek 8.3.**  
Typ wykresu



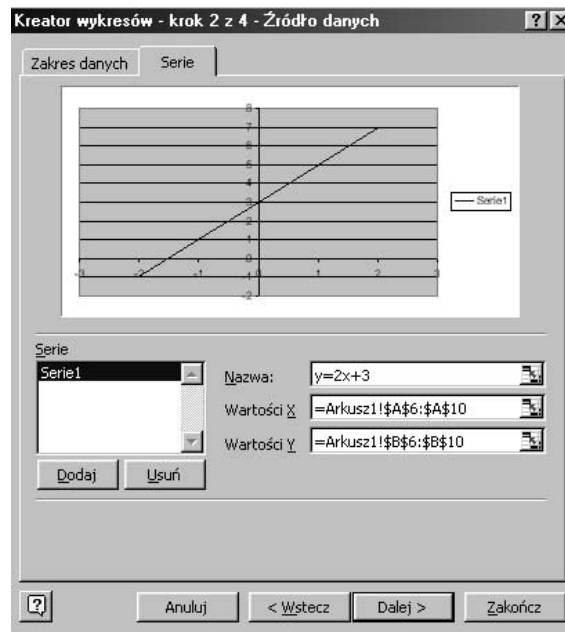
5. Następnie w polu tekstowym *Zakres danych* zaznacz komórki A6 ÷ B10 (rysunek 8.4).

Przejdź do zakładki *Serie*, w polu tekstowym *wartość X*, oraz *wartość Y*, wyświetli się automatycznie zakres danych. Natomiast w polu tekstowym *Nazwa*: wpisz  $y = 2x + 3$ , jak na rysunku 8.5. i kliknij *Dalej*.

**Rysunek 8.4.**  
Zakres danych



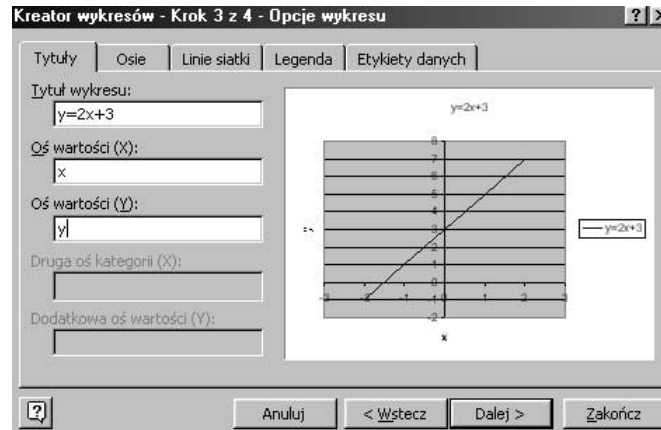
**Rysunek 8.5.**  
Serie



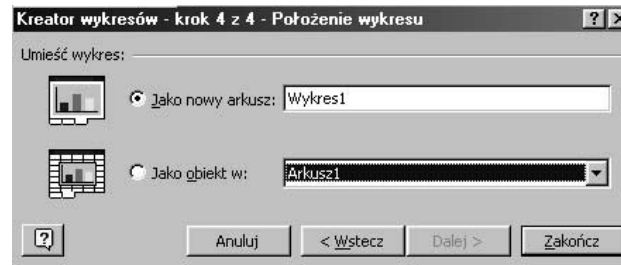
6. W Kolejnym kroku nazwij oś wartości X i oś wartości Y (rysunek 8.6) i kliknij *Dalej*.
7. W ostatnim kroku musisz wybrać opcję wstawienia wykresu do tego samego arkusza lub wyświetlania wykresu jako nowy arkusz. Wybierz *Jako obiekt w* i kliknij *Zakończ* (rysunek 8.7).



**Rysunek 8.6.**  
*Opcje wykresu*

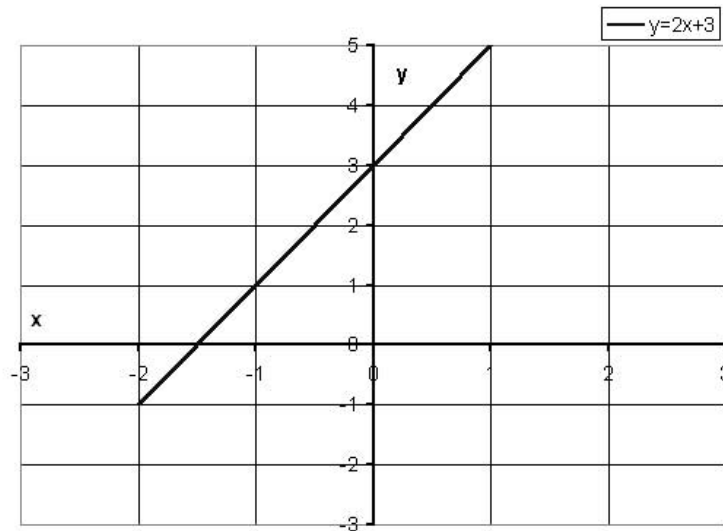


**Rysunek 8.7.**  
*Położenie wykresu*



8. Efekt końcowy powinien wyglądać jak na rysunku 8.8 (z dokonаныmi modyfikacjami).

**Rysunek 8.8.**  
*Wykres funkcji  
liniowej  $y = ax + b$*



Dostosowano elementy rysunku, by uzyskać lepszy efekt.

Jeżeli w komórkach B2 i B3 zmienisz którąś z wartości, wtedy automatycznie (adekwatnie do funkcji) zmienią się wartości i wygląd wykresu.

**Przykład 8.2.**

Sprawdź, czy punkty  $A = (0, -2)$ ,  $B = (2, -2)$ ,  $C = (-4, -14)$ ,  $D = (-12, -142)$  i  $E = (\sqrt{2}, 16)$  należą do wykresu funkcji  $y = -x^2 + 2$ .

**Sposób rozwiązania**

Przy rozwiązaniu wykorzystamy funkcje Excela JEŻELI() i PIERWIASTEK(). Sprawdzimy, czy dane punkty należą do funkcji, podstawiając wartości  $x$  i  $y$  do wzoru  $y = -x^2 + 2$ .

- ❖ Funkcja PIERWIASTEK() podaje pierwiastek kwadratowy liczby nieujemnej.

**Rozwiązanie**

1. Wprowadź stałe tekstowe. Wpisz do wszystkich komórek nowego skoroszytu tekst zgodnie z rysunkiem 8.9.

**Rysunek 8.9.**  
Stale tekstowe

	A	B	C
1	Wzór funkcji $y=-x^2+2$		Rozwiązanie
2	Współrzędne punktu P(x,y)		
3	x	y	
4	0	-2	
5	2	-2	
6	-4	-14	
7	-12	-142	
8		16	
9			

2. Oblicz  $\sqrt{2}$ . Do komórki A8 wpisz następującą formułę =PIERWIASTEK(2).
3. Sprawdź, czy podane w zadaniu punkty należą do funkcji  $y = -x^2 + 2$ . Do komórki C4 wpisz formułę =JEŻELI(B4=(-1)\*(A4^2)+2;"Pkt. należy do funkcji";"Pkt. NIE należy do funkcji") i naciśnij *Enter*.
4. Zaznacz komórkę C4 i za pomocą uchwyty skopiuj formułę aż do komórki C8.
5. W komórkach od C4 do C8 pojawi się rozwiązanie zadania (rysunek 8.10).

**Rysunek 8.10.**  
Rozwiązanie  
przykładu 8.2

	A	B	C	D
1	Wzór funkcji $y=-x^2+2$		Rozwiązanie	
2	Współrzędne punktu P(x,y)			
3	x	y		
4	0	-2	Pkt. NIE należy do funkcji	
5	2	-2	Pkt. należy do funkcji	
6	-4	-14	Pkt. należy do funkcji	
7	-12	-142	Pkt. należy do funkcji	
8	1,414213562	16	Pkt. NIE należy do funkcji	
9				
10				

**Przykład 8.3.**

Wyznacz miejsce zerowe funkcji  $y = 2x - 8$ .

**Sposób rozwiązania**

Miejszem zerowym funkcji jest każdy argument, dla którego wartość funkcji jest równa zero. Graficznie jest to punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OX.

Aby rozwiązać ten przykład, podstawiamy  $y = 0$  do wzoru ogólnego funkcji liniowej  $y = ax + b$  i obliczamy  $x$ .

$$0 = ax + b$$

$$-b = ax$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

Korzystając z funkcji Excela JEŻELI() oraz z definiowania komórek napiszemy formułę, która będzie obliczała miejsce zerowe funkcji liniowej.

**Rozwiązanie**

1. Wprowadź stałe tekstowe. Wpisz do wszystkich komórek nowego skoroszytu tekst zgodnie z rysunkiem 8.11.

**Rysunek 8.11.**  
Stale tekstowe

	A	B	
1	y=2x-8		
2			
3	a	2	
4	b	-8	
5			
6	Miejsce zerowe:		

2. Zdefiniuj odpowiednio komórki B3 i B4 jako a i b. W tym celu zaznacz komórkę B3. Z głównego menu wybierz *Wstaw/Nazwa/Definiuj...* Po pojawieniu się okna wpisz w górne pole tekstowe a i naciśnij *OK*. Postępując analogicznie, zdefiniuj komórkę B4 jako b (patrz rozdział 1, przykład 1.2).
3. Wyznacz miejsce zerowe podanej funkcji. Do komórki B6 wpisz formułę =JEŻELI((-1)\*b/a;(-1)\*b/a;"Nie ma miejsca zerowego") i naciśnij *Enter*. Otrzymasz rozwiązanie jak na rysunku 8.12.

**Rysunek 8.12.**  
Rozwiązanie  
przykładu 8.3

	A	B	C
1	y=2x-8		
2			
3	a	2	
4	b	-8	
5			
6	Miejsce zerowe:	4	
7			
8			

**Przykład 8.4.**

Sprawdź z definicji, czy funkcje  $y = -x + 3$ ,  $y = 2x - 4$ , gdzie  $x \in R$ , są rosnące, malejące, czy stałe.

**Sposób rozwiązania**

Przypomnijmy definicję funkcji rosnącej, malejącej i stałej:

Funkcję  $y = ax + b$  nazywamy:

- ❖ *rosnącą*, jeżeli wraz ze wzrostem argumentu  $x$  rosną wartości funkcji  $y$ ,
- ❖ *malejącą*, jeżeli wraz ze wzrostem argumentu  $x$  maleją wartości funkcji  $y$ ,
- ❖ *stałą*, jeżeli wraz ze wzrostem argumentu  $x$  wartość funkcji  $y$  jest stała (jest taka sama).

Do rozwiązania zadania wykorzystamy funkcję JEŻELI() arkusza kalkulacyjnego Excel.

**Rozwiązanie**

1. Wprowadź stałe tekstowe. Wpisz do wszystkich komórek nowego skoroszytu tekst zgodnie z rysunkiem 8.13.

**Rysunek 8.13.**  
Stale tekstowe

	A	B	C	D
1	Argument x	Wartość y		$y = -x + 3$
2	0			
3	1			
4				
5				
6				
7	Argument x	Wartość y		$y = 2x - 4$
8	0			
9	1			
10				

2. Określ wartość funkcji  $y = -x + 3$  dla argumentu równego zero. Do komórki B2 wpisz  $= -A2 + 3$ .
3. Podobnie określ wartość funkcji  $y = -x + 3$  dla argumentu równego jeden. Do komórki B3 wpisz  $= -A3 + 3$ .
4. Sprawdź, czy funkcja jest rosnąca. Do komórki D3 wpisz formułę  $= JEŻELI(A2 < A3 * (ORAZ(B2 < B3)); "Funkcja jest rosnąca"; " ")$ .
5. Sprawdź, czy funkcja jest malejąca. Następnie do komórki E3 wprowadź formułę  $= JEŻELI(A2 < A3 * (ORAZ(B2 > B3)); "Funkcja jest malejąca"; " ")$ .
6. Sprawdź, czy funkcja jest stała. Do komórki F3 wpisz następującą formułę  $= JEŻELI(A2 < A3 * (ORAZ(B2 = B3)); "Funkcja jest stała"; " ")$ .
7. Postępując analogicznie, sprawdź, czy funkcja  $y = 2x - 4$  jest rosnąca, malejąca, czy stała.
8. Efekt końcowy jak na rysunku 8.14.

**Rysunek 8.14.**  
Rozwiązanie  
przykładu 8.4

	A	B	C	D	E	F
1	Argument x	Wartość y		$y = -x + 3$		
2	0	3				
3	1	2			Funkcja jest malejąca	
4						
5						
6						
7	Argument x	Wartość y		$y = 2x - 4$		
8	0	-4				
9	1	-2		Funkcja jest rosnąca		
10						
11						

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 8.1.

Dana jest funkcja  $y = 4x - 8$  dla  $x \in R$ .

- Sporządź wykres tej funkcji.
- Znajdź jej miejsce zerowe.
- Sprawdź, czy funkcja jest rosnąca.

## Podsumowanie

Rozwiązanie powyższych przykładów przy zastosowaniu arkusza kalkulacyjnego Excel okazało się dużo szybsze i łatwiejsze od stosowania metody tradycyjnej. Sposób rozwiązania można analogicznie wykorzystywać dla innych funkcji liniowych czy też kwadratowych.

Przedstawione w tym rozdziale rozwiązania przykładów nie są jedynymi, ale pokazują, jak z definicji sprawdzić własności funkcji.